

ЛЕКЦИЯ 6

§6. Екінші ретті сызықты жүйенің траекториялары

6.1. Тұрақты нақты коэффициентті біртекті сызықты жүйені қарастырайық:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{1}$$

Бұл жүйенің $x_1 = 0, x_2 = 0$ нөлдік шешімі барлық уақытта бар. Осы шешімге сәйкес $(0, 0)$ нүктесі жүйенің теңбе-теңдік қалпы немесе тыныштық нүктесі деп аталынады.

Жүйенің нөлдік емес шешімдерінің фазалық траекторияларының кескіндерін анықтайық. Олар $A = (a_{ij})$ матрицасының меншікті сандарына байланысты.

Айталық, λ_1, λ_2 - сандары A матрицасының меншікті сандары болсын, яғни олар сипаттаушы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

теңдеуінің түбірлері болсын.

Төмендегідей жағдайларды қарастырайық.

1⁰. λ_1, λ_2 - нақты әртүрлі сандар. Жүйенің жалпы шешімі

$$x(t) = C_1 \alpha e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta e^{\lambda_2 t}\tag{3}$$

түрінде жазылады. Мұндағы, α және β меншікті векторлар, C_1, C_2 - тұрақты сандар.

Жалпы шешімнің α, β базисындағы координаттарын ξ_1, ξ_2 - деп белгілейік:

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

Траекториялардың кескінін және бағытын байқау үшін $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ болатын бірінші квадрантты қарастырсақ, жеткілікті. Сәйкес төмендегідей үш жағдайды қарастырайық:

а) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ болсын. Бұл жағдайда $C_1 = C_2 = 0$ болса, онда $(0, 0)$ тыныштық нүктесін аламыз. Егер $C_1 > 0, C_2 = 0$ болса, онда ξ_2 осі фазалық траектория, ал $C_1 = 0, C_2 > 0$ болса, онда ξ_1 осі фазалық траектория болады. $C_1 > 0, C_2 > 0$ болғанда $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ егер $t \rightarrow +\infty$, яғни фазалық траектория тыныштық нүктесіне ұмтылады және

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi_2}{\xi_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

Соңғы қатынас траекторияның ξ_2 осін координаттың бастапқы нүктесінде жанап өтетінін көрсетеді.

Егер $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ болса, онда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi_1}{\xi_2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0$$

Бұл қатынастан траекторияның ξ_1 осін жанап өтетінін көреміз.

Жалпы, траекторияның теңдеуін былай жазуға болады:

$$\xi_2 = C \xi_1^S, S = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (5)$$

Ол үшін (4) қатынастың біріншісін λ_2 дәрежеге, екіншісін λ_1 дәрежеге көтеріп, теңестірсек, жеткілікті. (5) қатынастан траекторияның парабола екенін көреміз.

Бұл парабола бойымен қозғалыс $t \rightarrow +\infty$ координат жүйесінің басы $(0, 0)$ нүктесіне қарай бағытталған. Мұндай жағдайда $(0, 0)$ нүктесі орнықты «түйін» деп аталады (1 – суретті қараңыз).

б) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ болсын. Бұл жағдайда фазалық траекторияның түрі алдыңғы түрдей болады, тек қозғалыс кері бағытта болады. Сондықтан, координат жүйесінің бас нүктесі орнықсыз «түйін» деп аталады (2 – суретті қараңыз).

в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ болсын. Бұл жағдайда, егер $C_1 = 0, C_2 > 0$ болса, онда $\xi_1 = 0, \xi_2 = e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ егер $t \rightarrow +\infty$, ал $C_1 > 0, C_2 = 0$ болса, онда $\xi_2 = 0, \xi_1 = e^{\lambda_1 t} \rightarrow +\infty$ егер $t \rightarrow +\infty$. $C_1 > 0, C_2 > 0$ болса, онда $\xi_1 \rightarrow +\infty, \xi_2 \rightarrow 0$ егер $t \rightarrow +\infty$. Сондықтан, фазалық траекторияның түрі гипербола болады да, координат жүйесінің бас нүктесі «ершік» деп аталады. Ал сол координат жүйесінің осьтері ершіктің «мұрттары» деп аталады (3, 4 – суреттерді қараңыз).

(Егер $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ болса, онда траектория келбеті алдыңғыдай болады).

2⁰. λ_1, λ_2 - комплексті түйіндес түбірлер. Бұл жағдайда жалпы шешім былай жазылады:

$$x(t) = C\alpha e^{\lambda_1 t} + \overline{C}\overline{\alpha} e^{\overline{\lambda}_1 t} \quad (6)$$

Егер $\lambda = a + bi, \alpha = \gamma_1 - i\gamma_2, C = S_1 + iS_2$ - деп алсақ, онда (6) теңдіктен

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2 \\ \xi_1 &= 2e^{at} (S_1 \cos bt - S_2 \sin bt) \\ \xi_2 &= 2e^{at} (S_2 \cos bt + S_1 \sin bt) \end{aligned} \quad (7)$$

теңдіктері шығады. Төмендегідей екі жағдайды қарастырайық.

а) $a = 0$ болса, онда $\lambda = \pm ib$. Осыдан

$$\xi_1 = \rho \cos(bt + \varphi), \xi_2 = \rho \sin(bt + \varphi) \quad (8)$$

қатынастарын аламыз. Мұндағы, $\rho = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{S_2}{S_1}$. (8)

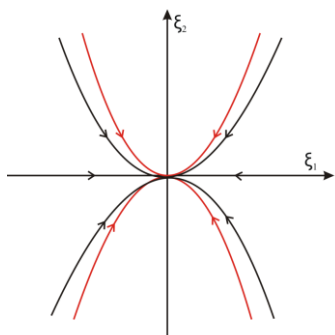
қатынастарды квадраттап қосатын болсақ, шеңберлер жиынын аламыз. Бұл жағдайда координат жүйесінің бас нүктесі «центр» деп аталады. Бұл шеңбер (немесе эллипс) бойымен қозғалыс бағыты b -ның таңбасымен анықталады (5 – суретті қараңыз).

б) $a \neq 0$. Бұл жағдайда траекторияның теңдеуі төмендегідей:

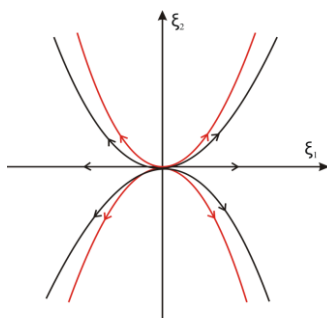
$$\xi_1 = \rho e^{at} \cos(bt + \varphi), \xi_2 = \rho e^{at} \sin(bt + \varphi) \quad (9)$$

Оның графигі спираль болып келеді. Мұнда егер $a > 0$ болса, онда $\xi_1 \rightarrow +\infty$, $\xi_2 \rightarrow +\infty$, ал $a < 0$ болса, онда $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$ егер $t \rightarrow +\infty$. Сондықтан, координат жүйесінің бас нүктесі бірінші жағдайда орнықсыз «фокус», екінші жағдайда орнықты «фокус» деп аталады (6, 7 – суреттерді қараңыз).

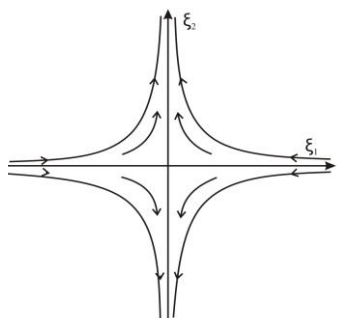
Ескерту. Меншікті сандардың өзара тең және нөлге тең болатын жағдайларын қарастырмадық. Олар туралы [6] оқу құралын қараңыз.



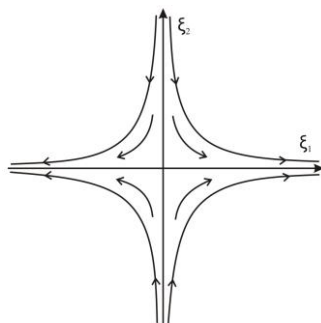
1 – сурет



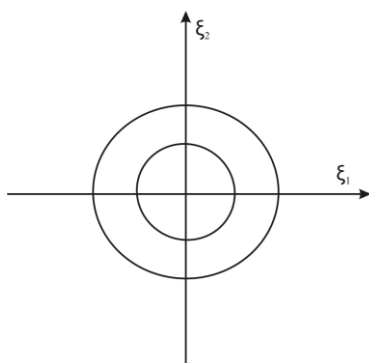
2 – сурет



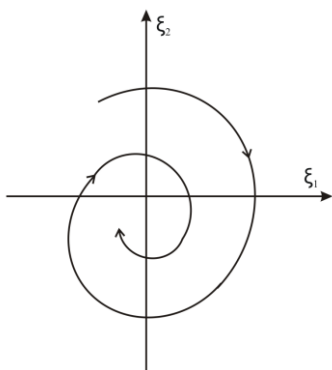
3 – цикл



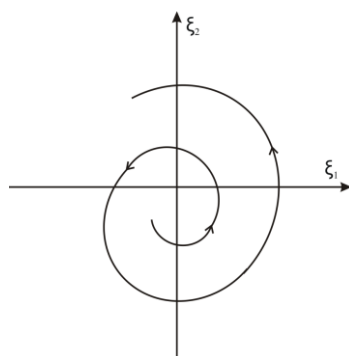
4 – цикл



5 – цикл



6 – цикл



7 – цикл

